

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

BANACH CEBİRLERİNDE n -JORDAN ÇARPANLAR

Burcu AKÇAY

YÜKSEK LİSANS SEMİNERİ

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Berna ARSLAN

AYDIN-2023

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	2
1. GİRİŞ	3
2. TEMEL BİLGİLER	4
2.1. Banach Cebirleri	10
2.2. Cebirsel Tensör Çarpım	13
2.3. Banach Uzayların Projektif Tensör Çarpımı	17
3. n - ÇARPANLAR ve n -JORDAN ÇARPANLAR	20
4. n -JORDAN ÇARPANLARIN KARAKTERİZASYONU	25
KAYNAKLAR	35

1. GİRİŞ

Çarpan kavramı, ilk olarak harmonik analizde Fourier serilerinin toplanabilirliği konusu ile bağlantılı olarak ortaya çıkmıştır. A bir Banach cebiri ve $T : A \rightarrow A$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $a, b \in A$ için, $T(ab) = aT(b)$ ise T dönüşümüne (sağ) çarpan adı verilir.

Daha sonra bu kavram, grup cebirlerinin homomorfizmalarının araştırılması, Banach cebirlerinin genel teorisi gibi diğer harmonik analiz alanlarında kullanılmıştır.

Banach cebir teorisinde çarpanlar ilk kez S. Helgason tarafından 1956 yılında tanıtılmış, J.K. Wang tarafından 1961 yılında detaylı olarak çalışılmıştır.

Sh. Hejazian, M. Mirzavaziri ve M.S. Moslehian, 2005 yılında kompleks cebirlerde $n \geq 2$ tamsayıları için n -homomorfizma kavramını tanıtmışlar, homomorfizmalar ile bağlantısını araştırmışlardır. Ayrıca n -homomorfizmalar yardımı ile cebirlerde bazı değişmelilik koşullarını çalışarak Banach cebirlerde bazı karakterizasyonlarını elde etmişlerdir.

2009 yılında M.E. Gordji, Banach cebirlerde n -Jordan homomorfizma kavramını tanıtmış, değişmeli olmayan bir Banach cebirinden değişmeli yarı-basit Banach cebirlerine tanımlı her 3-Jordan homomorfizmanın bir 3-homomorfizma olduğunu kanıtlamıştır.

J. Laali ve M. Fozouni, 2017 yılında n -homomorfizmalardan yola çıkarak bir A Banach cebirinden bir Banach A -bimodüle n -çarpan kavramını tanıtmışlar ve bir A Banach cebiri üzerinde tanımlı tüm n -çarpanların uzayı ile A dan $\mathbb{C}$ ye tanımlı sıfırdan farklı tüm n -homomorfizmaların uzayı arasındaki bağlantıyı araştırmışlardır.

Daha sonra M. Fozouni 2018 yılında bir A Banach cebirinden bir Banach sol A -modüle sağ n -Jordan çarpan kavramını tanıtmış ve yaklaşık yerel n -Jordan çarpımlar ile karakterizasyonunu elde etmiştir.

Bu seminerde, esas olarak A. Zivari-Kazempour'un 2022 yılında yayınlamış olduğu “*Characterization of n -Jordan multipliers*” adlı çalışması ele alınacaktır.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu kısımda, Banach Cebirleri teorisinde iyi bilinen bazı temel kavramlar ile diğer kısımlarda gerekli olacak bazı özellikler verilecektir.

Tanım 2.1. M bir toplamsal değişmeli grup ve R bir halka olsun. $\cdot : R \times M \rightarrow M, (r, x) \mapsto r \cdot x$ ile tanımlanan dış işlem, her $r, s \in R$ ve $x, y \in M$ için

$$(i) \quad r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$$

$$(ii) \quad (r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$$

$$(iii) \quad (rs) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$$

şartlarını sağlıyorsa M ye bir *sol R -modül* denir. Bu koşullara ek olarak R halkası birimli ve $1_R, R$ nin birimi olmak üzere

$$(iv) \quad 1_R \cdot x = x$$

şartı da sağlanıyorsa M ye *birimsel sol R -modül* denir.

Eğer M hem sağ R -modül hem de sol R -modül ve her $r, s \in R$ ve her $x \in M$ için,

$$r \cdot (x \cdot s) = (r \cdot x) \cdot s$$

şartı sağlanıyor ise o zaman M ye bir *R -bimodül* denir.

Eğer $\mathbb{F}$ bir cisim ve M bir birimsel sol veya sağ $\mathbb{F}$ -modül ise M ye $\mathbb{F}$ üzerinde *bir vektör uzayı* ya da kısaca *$\mathbb{F}$ -vektör uzayı* denir. Burada M nin elemanlarına *vektör*, $\mathbb{F}$ cisminin elemanlarına da *skaler* adı verilir.

Tanım 2.2. V bir $\mathbb{F}$ -vektör uzayı, $n \geq 1$ için $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ sonlu bir küme ve $\emptyset \neq B \subset V$ herhangi bir küme olsun.

(i) Bir $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ skalerler kümesi için A daki vektörlerin bir *lineer bileşimi* (*lineer kombinasyonu*) $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V$ formunda bir vektördür.

(ii) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ ise A ya *lineer bağımsız küme* denir. A kümesi lineer bağımsız değilse A ya *lineer bağımlı küme* denir. A kümesinin lineer bağımlı olması halinde, $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerinin en az biri diğerlerinin lineer bir birleşimi olarak ifade edilir. Örneğin, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$ eşitliği, $\alpha_n \neq 0$ olmak üzere gerçekleşiyorsa A kümesi lineer bağımlı olup, v_n i bu eşitlikten bulabiliriz:

$$v_n = \sum_{j=1}^{n-1} b_j v_j \ni b_j = -\frac{\alpha_j}{\alpha_n}, j = 1, 2, \dots, n-1$$

(iii) B kümesinden alınan her sonlu sayıdaki vektörün tüm lineer bileşimlerinin kümesine B kümesinin *lineer gereni* (*spanı*, *ürettiği altuzay*) denir ve $\text{Span}B$ ya da $\langle B \rangle$ ile gösterilir. Yani,

$$\text{Span}B = \left\{ x = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \mid k \in \mathbb{N}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}, u_1, u_2, \dots, u_k \in B \right\}$$

dir. $\text{Span}B$, V nin B kümesini kapsayan bir altuzayıdır. Eğer B lineer bağımsız bir küme ve $\text{Span}B = V$ ise o zaman B ye V nin bir *tabanı* denir. B altkümesinin elemanlarına da V nin *taban vektörleri* denir.

(iv) m tane vektör tarafından üretilen her V $\mathbb{F}$ -vektör uzayının bir tabanı vardır ve V nin herhangi bir tabanında yer alan vektör sayısı en fazla m tanedir. V nin herhangi iki tabanı aynı sayıda vektör içerir.

(v) V nin taban vektörlerinin sayısına V nin boyutu denir ve $\dim_{\mathbb{F}}(V)$ ile gösterilir. $\dim_{\mathbb{F}}(V)$ sonlu ise bu durumda V ye *sonlu boyutludur* denir. Aksi taktirde V ye sonsuz boyutludur denir.

Tanım 2.3. V ve W iki $\mathbb{F}$ -vektör uzayı olsun. V den W ye bir T fonksiyonu, her $x, y \in V$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için,

$$T(\alpha \cdot x + y) = \alpha \cdot T(x) + T(y)$$

koşulunu sağlıyorsa T ye *lineer dönüşüm* denir. V den W ya tüm lineer dönüşümlerin kümesi $\mathcal{L}(V, W)$ ile gösterilir. Her $x \in V$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için $(T + S)(x) = T(x) + S(x)$ ve $(\alpha \bullet T)(x) = \alpha \cdot T(x)$ işlemleriyle $\mathcal{L}(V, W)$, bir $\mathbb{F}$ -vektör uzayıdır. $\mathcal{L}(V, V)$ uzayı, kısaca $\mathcal{L}(V)$ şeklinde yazılır. $T : V \rightarrow \mathbb{F}$ lineer dönüşümüne V üzerinde *lineer fonksiyonel* denir. Burada $\mathbb{F}$ cismi aynı zamanda bir $\mathbb{F}$ -vektör uzayıdır.

Tanım 2.4. K birimli, değişmeli bir halka ve A herhangi bir halka olsun. $(A, +)$ bir birimsel K -modül ve her $a \in K, x, y \in A$ için,

$$a \cdot (xy) = (a \cdot x)y = x(a \cdot y)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, o zaman A ya bir K -cebir veya A , K halkası üzerinde bir *cebiri* denir.

Eğer her $x \in A$ için $e_A x = x e_A = x$ olacak şekilde bir $0_A \neq e_A \in A$ varsa e_A ye A cebirinin *birim elemanı*, A ya da bir *birimli cebir* denir.

Tanım 2.5. A bir cebir ve $B \subseteq A$ bir altuzayı olsun. Her $a, b \in B$ için $ab \in B$ ise B ye A nın bir *altcebi* denir.

Tanım 2.6. A birimli bir cebir ve e_A , A nın birimi olsun. $a \in A$ olmak üzere eğer $ab = ba = e_A$ eşitliğini sağlayan bir $b \in A$ elemanı varsa a ya *tersinir eleman* denir. $b \in A$ elemanına da a elemanının *tersi* denir ve a^{-1} ile gösterilir. A daki tüm tersinir elemanların kümesi $Inv(A)$ ile gösterilir.

$$Inv(A) = \{a \in A \mid a^{-1} \in A\}$$

dır. $Inv(A)$ kümesi, A daki çarpma işlemine göre bir grup oluşturur.

Tanım 2.7. A bir cebir ve $a \in A$ olsun. Eğer $a^2 = a$ ise a ya A nın *idempotent elemanı* denir.

Tanım 2.8. X bir $\mathbb{F}$ -vektör uzayı ve $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her $\lambda \in \mathbb{F}$ için,

- (i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *norm* denir. Üzerinde bir $\|\cdot\|$ normu tanımlanmış olan X vektör uzayına *normlu uzay* adı verilir ve $(X, \|\cdot\|)$ ile gösterilir.

Tanım 2.9. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Herhangi $x \in X$ ve herhangi $r > 0$ reel sayısı için

$$B_r(x) = \{y \in X \mid \|x - y\| < r\}$$

kümesine x merkezli r yarıçaplı açık yuvar;

$$B_r[x] = \{y \in X \mid \|x - y\| \leq r\}$$

kümesine x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar denir. Eğer $r = 1$ ve $x = 0$ ise $B_1(0)$ kümesine *açık birim yuvar* ve $B_1[0]$ kümesine *kapalı birim yuvar* adı verilir.

Tanım 2.10. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $A \subset X$ olsun.

- (i) Her $x \in A$ için $B_\varepsilon(x) \subset A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa A kümesine *açık küme* denir.
- (ii) $X \setminus A$ kümesi açık ise A kümesine *kapalı küme* denir.
- (iii) $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\|x - y\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $y \in A$ var ise, ya da buna denk olarak $y_n \rightarrow x \in X$ olacak şekilde bir $\{y_n\} \subset A$ dizisi var ise o zaman x e A nın bir *kapanış noktası* denir. A nın tüm kapanış noktalarının kümesine A kümesinin *kapanışı* adı verilir ve

$\bar{A}$ ile gösterilir. $\bar{A}$ kapalı kümedir ve A kümesini kapsayan X in tüm kapalı altkümelerinin arakesetine eşittir. Yani

$$\bar{A} = \cap \{K \mid A \subset K, K \text{ kapalı küme}\}$$

dir. Bu nedenle, $\bar{A}$, A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümedir.

(iv) A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\bar{A} = A$ olmasıdır. Buna göre, A kapalıdır $\Leftrightarrow \{y_n\} \subset A$ dizisi için $y_n \rightarrow x \in X$ olduğunda $x \in A$ dır.

(v) $\bar{A} = X$ ise A kümesi X uzayında *yoğun bir kümedir* denir.

Tanım 2.11. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi $\{x_n\}$ olsun.

(i) $x \in X$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_0$ için $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına *yakınsar* ya da $\{x_n\}$ dizisi *yakınsaktır* denir. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ya da $x_n \rightarrow x$ yazılır.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n \geq n_0$ için $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

Teorem 2.12. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında yakınsak her bir $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

İspat. $\{x_n\}$, $(X, \|\cdot\|)$ de yakınsak bir dizi ve $x_n \rightarrow x \in X$ olsun. O halde verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n, m \geq N$ için $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Dolayısıyla aynı N doğal sayısı için

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Not 2.13. Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Yani her Cauchy dizisi yakınsak değildir.

Örneğin, $X = (0, 1)$ kümesi üzerindeki normun $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\|x\| = |x|$ ($x \in X$) fonksiyonu olduğunu kabul edersek $(\frac{1}{n})$ dizisi, X normlu uzayında bir Cauchy dizisidir: $\forall \varepsilon > 0$ için $n, m \geq N$ olmak üzere

$$\|x_n - x_m\| = |x_n - x_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N}$$

olur. Burada $N > \frac{2}{\varepsilon}$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ seçilirse $\|x_n - x_m\| \leq \frac{2}{N} < \varepsilon$ olup $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir; ancak $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \notin (0, 1)$ olduğundan bu dizi X normlu uzayında yakınsak değildir.

Tanım 2.14. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı tam ise, yani X teki her Cauchy dizisi X in bir elemanına yakınsıyor ise, X e bir *Banach uzayı* denir.

Her normlu uzay tam değildir, ancak her normlu uzayın bir tamlanışı vardır.

Tanım 2.15. $(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normlu uzaylar ve $T : X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ şartı sağlanıyorsa T ye bir *izometri* denir. Aşıkarak, T birebirdir. Eğer T lineer dönüşümü, X den Y ye örten bir izometri ise o zaman T ye *izometrik izomorfizma* adı verilir.

Teorem 2.16. Her $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayının bir tamlanışı vardır. Üstelik X normlu uzayının tamlanışı izometrikleri dışında tektir. Yani eğer Y , X in bir tamlanışı olmak üzere $\tilde{Y}$ da X ile izometrik, yoğun bir $\tilde{W}$ altuzayına sahip herhangi bir tam normlu uzay ise $\tilde{Y}$ ile Y izometriktir.

Tanım 2.17. $(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normlu uzaylar, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve belli bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $x \in X$ için,

$$\|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, f fonksiyonuna $x_0 \in X$ noktasında *süreklidir* denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise f (X üzerinde) *süreklidir* denir.

Tanım 2.18. $(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normlu uzaylar ve $T : X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq k \cdot \|x\|_X$ olacak şekilde pozitif bir k reel sayısı varsa T ye *sınırlıdır* denir.

Bir lineer operatörün sınırlılığı ve sürekliliği arasındaki ilişki, aşağıdaki teorem ile verilmiştir:

Teorem 2.19. X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşüm olsun. O halde aşağıdakiler denktir:

- (i) T sınırlıdır.
- (ii) T düzgün süreklidir.
- (iii) T süreklidir.
- (iv) T , bir $x_0 \in X$ noktasında süreklidir.

Tanım 2.20. X ve Y , aynı $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde iki normlu uzay olsun. X den Y ye bütün sınırlı lineer dönüşümlerin kümesi $\mathfrak{B}(X, Y)$ ile gösterilecektir. Teorem 2.19 dan

dolayısı $\mathfrak{B}(X, Y)$ nin elemanları sürekli lineer operatör adını da alır. $S, T \in \mathfrak{B}(X, Y)$ olsun. $\mathfrak{B}(X, Y)$ kümesi, her $x \in X$ için $(T + S)(x) = T(x) + S(x)$ işlemiyle bir değişmeli gruptur ve her $c \in \mathbb{F}$ için

$$\begin{aligned} \bullet : \mathbb{F} \times \mathfrak{B}(X, Y) &\rightarrow \mathfrak{B}(X, Y) \\ (c, T) &\mapsto c \bullet T : \begin{array}{ccc} X &\rightarrow & Y \\ x &\mapsto & (c \bullet T)(x) = c \cdot T(x) \end{array} \end{aligned}$$

işlemi ile $\mathfrak{B}(X, Y)$ kümesi, bir $\mathbb{F}$ -vektör uzayıdır:

$\mathfrak{B}(X, Y)$ nin elemanları üzerine bir sınırlılık kısıtlaması getirildiğinden, aşikar olarak, $\mathfrak{B}(X, Y) \subseteq \mathfrak{L}(X, Y)$ dir. Dolayısıyla, $\mathfrak{B}(X, Y)$ nin bir altuzay olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için, her $T, S \in \mathfrak{B}(X, Y)$ ve her α skaleri için $\alpha T + S \in \mathfrak{B}(X, Y)$ olduğunu görelim: Öncelikle $\alpha T + S$ operatörü lineerdir, çünkü her $x, y \in X$ ve her λ skaleri için,

$$\begin{aligned} (\alpha T + S)(\lambda x + y) &= (\alpha T)(\lambda x + y) + S(\lambda x + y) \\ &= \alpha(T(\lambda x + y)) + S(\lambda x + y) \\ &= \alpha(\lambda(T(x)) + T(y)) + \lambda(S(x)) + S(y) \\ &= \alpha(\lambda(T(x))) + \alpha(T(y)) + \lambda(S(x)) + S(y) \\ &= \lambda(\alpha(T(x)) + S(x)) + \alpha(T(y)) + S(y) \\ &= \lambda((\alpha T)(x) + S(x)) + (\alpha T)(y) + S(y) \\ &= \lambda((\alpha T + S)(x)) + (\alpha T + S)(y) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Şimdi $\alpha T + S$ operatörünün sınırlı olduğunu gösterelim. $\|T\| = c_1$ ve $\|S\| = c_2$ olsun. O halde

$$\|(\alpha T + S)(x)\| = \|\alpha(T(x)) + S(x)\| \leq |\alpha| \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq (|\alpha| c_1 + c_2) \|x\|$$

olup, $c = |\alpha| c_1 + c_2 > 0$ seçerek $\|(\alpha T + S)(x)\| \leq c \|x\|$ elde edilir. Yani, $\alpha T + S$ operatörü sınırlıdır. Sonuç olarak, $\alpha T + S \in \mathfrak{B}(X, Y)$ olur ve böylece $\mathfrak{B}(X, Y)$ de bir vektör uzayıdır.

Üstelik

$$\|\cdot\| : \mathfrak{B}(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}, \|T\| = \sup\{\|T(x)\| \mid \|x\| = 1\}$$

fonksiyonu, $\mathfrak{B}(X, Y)$ uzayı üzerinde bir norm tanımlar. $\|T\|$ sayısına, T operatörünün normu denir.

(1) Aşikar olarak, $\|T\| \geq 0$ dır.

$$(2) \|T\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X, \|T(x)\| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X, T(x) = 0 \Leftrightarrow T = 0$$

$$(3) \forall \alpha \text{ skaleri için } \|(\alpha T)(x)\| = \|\alpha(T(x))\| = |\alpha| \|T(x)\| \text{ olup}$$

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\|=1} \|(\alpha T)(x)\| &= \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \|T(x)\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \\ &\Rightarrow \|\alpha T\| = |\alpha| \|T\| \end{aligned}$$

(4) $\|x\| = 1$ olacak şekilde her $x \in X$ ve her $S, T \in \mathfrak{B}(X, Y)$ için,

$$\begin{aligned} \|(S+T)(x)\| &= \|S(x) + T(x)\| \leq \|S(x)\| + \|T(x)\| \\ &\leq \|S\| \|x\| + \|T\| \|x\| \leq \|S\| + \|T\| \end{aligned} \quad (S, T \text{ sınırlı olduğundan})$$

$$\text{olup } \|S+T\| = \sup_{\|x\|=1} \|(S+T)(x)\| \leq \|S\| + \|T\| \text{ dir.}$$

Teorem 2.21. *Eğer X bir normlu uzay ve Y bir Banach uzayı ise o zaman $\mathfrak{B}(X, Y)$ bir Banach uzayıdır.*

Tanım 2.22. $X, \mathbb{F}$ cismi üzerinde bir normlu uzay olsun. $\mathfrak{B}(X, \mathbb{F})$ vektör uzayına X in *dual uzayı* denir ve X^* ile gösterilir. X^* uzayının elemanlarına X üzerinde bir *sınırlı lineer fonksiyonel* adı verilir.

Sonuç 2.23. X^* bir Banach uzayıdır.

2.1. Banach Cebirleri

Tanım 2.24. A bir $\mathbb{C}$ -cebir ve $\|\cdot\|$ normu ile bir normlu uzay olsun. Her $x, y \in A$ için

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

şartı sağlanıyorsa A ya bir *normlu cebir* denir. Eğer $(A, \|\cdot\|)$ normlu cebiri aynı zamanda bir Banach uzayı ise A ya bir *Banach cebiri* denir.

Eğer A Banach cebirinde $\|e_A\| = 1$ olacak şekilde bir $e_A \in A$ birim elemanı varsa, A ya bir *birimli (unital) Banach cebiri* denir.

Tanım 2.25. A bir Banach cebiri olsun. Eğer B, A nın kapalı bir altceberi ise o zaman B tam uzay olup (A daki işlemler ve norm ile) bir Banach cebiri belirtir. Bu durumda B ye A nın bir *Banach altceberi* denir.

Örnek 2.26. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ uzayları, bilinen toplama, çarpma işlemleri ve alışılmış norm ile birer birimli, değişmeli Banach cebiridir.

Örnek 2.27. X bir Banach uzayı olsun. $\mathfrak{B}(X, X)$ Banach uzayı üzerinde çarpma işlemi, $S, T \in \mathfrak{B}(X, X)$ olmak üzere

$$(TS)(x) := T(S(x)) \quad (x \in X)$$

şeklinde tanımlansın. Her $T, S \in \mathfrak{B}(X, X)$ ve her α skaleri için,

$$(\alpha(TS))(x) = \alpha((TS)(x)) = \alpha(T(S(x))) = (\alpha T)(S(x)) := ((\alpha T)S)(x)$$

ve

$$(T(\alpha S))(x) := T((\alpha S)(x)) = T(\alpha(S(x))) = \alpha(T(S(x))) := \alpha((TS)(x)) = (\alpha(TS))(x)$$

eşitlikleri sağlandığından $\mathfrak{B}(X, X)$ bir cebirdir. Üstelik her $T, S \in \mathfrak{B}(X, X)$ için,

$$\begin{aligned} \|TS\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(TS)(x)\| := \sup_{\|x\|=1} \|T(S(x))\| \leq \|T\| \sup_{\|x\|=1} \|S(x)\| \\ &\leq \|T\| \|S\| \sup_{\|x\|=1} \|x\| = \|T\| \|S\| \end{aligned}$$

olduğundan $\mathfrak{B}(X, X)$ bir Banach cebiridir.

Önerme 2.28. A birimli bir Banach cebiri ve birimi e_A olsun. $\|e_A - x\| < 1$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in A$ elemanı tersinirdir ve $x^{-1} = e_A + \sum_{n=1}^{\infty} (e_A - x)^n$ dir.

Tanım 2.29. A bir Banach cebiri ve X bir Banach uzayı olsun. Eğer X bir A -bimodül ve her $a \in A, x \in X$ için

$$\|a \cdot x\| \leq K \|a\| \|x\| \quad \text{ve} \quad \|x \cdot a\| \leq K \|x\| \|a\| \quad (2.3)$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti var ise X e bir *Banach A -bimodül* denir. (2.3) deki eşitsizliklerden yalnızca soldaki geçerli olduğu durumda X sol A -modüle bir *sol Banach A -modül*; yalnızca sağdaki geçerli olduğunda X sağ A -modüle bir *sağ Banach A -modül* adı verilir.

Tanım 2.30. A bir Banach cebiri ve X bir Banach A -bimodül olsun. $a \in A, x \in X$ ve $f \in X^*$ için,

$$\begin{aligned} \bullet : A \times X^* &\rightarrow X^* \\ (a, f) &\mapsto a \bullet f : X \rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto (a \bullet f)(x) = f(x \cdot a) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \bullet : X^* \times A &\rightarrow X^* \\ (f, a) &\mapsto f \bullet a : X \rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto (f \bullet a)(x) = f(a \cdot x) \end{aligned}$$

işlemleriyle X^* bir sol A -modül ve bir sağ A -modüldür. Üstelik her $a, b \in A, x \in X, f \in X^*$ için,

$$\begin{aligned} (a \bullet (f \bullet b))(x) &= (f \bullet b)(x \cdot a) = f(b \cdot (x \cdot a)) = f((b \cdot x) \cdot a) \\ &= (a \bullet f)(b \cdot x) = ((a \bullet f) \bullet b)(x) \end{aligned}$$

sağlandığından $a \bullet (f \bullet b) = (a \bullet f) \bullet b$ elde edilir. O halde $X^* = \mathfrak{B}(X, \mathbb{C})$ bir A -bimodüldür. $\|x\| = 1$ şartını sağlayan her $x \in X$ ve her $a \in A, f \in X^*$ için,

$$\|(a \bullet f)(x)\| = \|f(x \cdot a)\| \leq \|f\| \|x \cdot a\|$$

olup X bir Banach A -bimodül olduğundan

$$\|a \bullet f\| = \sup_{\|x\|=1} \|(a \bullet f)(x)\| \leq K \|f\| \|a\|$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti vardır. O halde X^* bir Banach A -bimodüldür ve X^* uzayına X in *dual modülü* denir.

Eğer A Banach cebiri birimli ve X Banach A -bimodülü birimsel ise, o zaman her $x \in X, f \in X^*$ için

$$(e_A \bullet f)(x) = f(x \cdot e_A) = f(x) = f(e_A \cdot x) = (f \bullet e_A)(x)$$

olduğundan her $f \in X^*$ için $e_A \bullet f = f \bullet e_A = f$ olur. Böylece X^* dual modülü bir birimsel Banach A -bimodül olur.

Tanım 2.31. A bir Banach cebiri olsun. Eğer $A^2 = \{ab \mid a, b \in A\}$ kümesinin lineer gereni A içinde yoğun ise A ya *esas (essential)* Banach cebiri denir.

Tanım 2.32. A bir Banach cebiri olsun. Eğer

$$A^n = \{a_1 a_2 a_3 \dots a_n \mid a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in A\} = \{0\}$$

olacak şekilde bir $n \geq 2$ tamsayısı var ise A ya *nilpotent Banach cebiri* denir. $A^n = \{0\}$ olacak şekildeki en küçük $n \in \mathbb{N}$ sayısına A nın *indeksi* denir ve $I(A)$ ile gösterilir.

2.2. Cebirsel Tensör Çarpım

Tanım 2.33. X, Y ve Z birer $\mathbb{F}$ -vektör uzayı olsun. Eğer bir $\phi : X \times Y \longrightarrow Z$ fonksiyonu, $\forall x, x_1, x_2 \in X, y, y_1, y_2 \in Y$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için,

$$\phi(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha \phi(x_1, y) + \phi(x_2, y)$$

$$\phi(x, \alpha y_1 + y_2) = \alpha \phi(x, y_1) + \phi(x, y_2)$$

şartları sağlanıyorsa ϕ ye *2-lineer fonksiyon* denir. Eğer $Z = \mathbb{F}$ ise, ϕ ye *2-lineer fonksiyonel* adı verilir. $X \times Y$ den Z ye tüm 2-lineer fonksiyonların kümesi $BL(X \times Y, Z)$ ile gösterilir.

Tanım 2.34. X ve Y birer $\mathbb{F}$ -vektör uzayı olsun. $x \in X$ ve $y \in Y$ olmak üzere her $f \in BL(X \times Y, \mathbb{F})$ için

$$x \otimes y : BL(X \times Y, \mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}, \quad (x \otimes y)(f) = f(x, y)$$

ile tanımlı temel tensörler, $BL(X \times Y, \mathbb{F})$ üzerinde bir lineer fonksiyoneldir.

$$\{x \otimes y \mid x \in X, y \in Y\}$$

kümesinin lineer gereneine X ve Y vektör uzaylarının *cebirsel tensör çarpımı* denir ve bu küme $X \otimes Y$ ile gösterilir. $X \otimes Y$ kümesi, $BL(X \otimes Y, \mathbb{F})$ nin dual uzayının bir alt uzayıdır. $X \otimes Y$ nin elemanları *tensörler* olarak adlandırılır. Böylece $u \in X \otimes Y$ tensörü, $\lambda_i \in \mathbb{F}$, $x_i \in X$, $y_i \in Y$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes y_i$$

şeklinde temsil edilebilir. Dolayısıyla her bir $f \in BL(X \times Y, \mathbb{F})$ için

$$u(f) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes y_i \right) (f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i, y_i)$$

olur. Buna göre tensör çarpımı için aşağıdaki özellikler vardır:

Önerme 2.35. X ve Y birer $\mathbb{F}$ -vektör uzayı olsun. $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$, ve $\lambda \in \mathbb{F}$ olmak üzere, $e(x, y) = x \otimes y$ ile tanımlanan $e : X \times Y \rightarrow X \otimes Y$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$
- (ii) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$
- (iii) $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$
- (iv) $0_X \otimes y = x \otimes 0_Y = 0$

Bu durumda e bir 2-lineer fonksiyondur.

İspat. Her $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{F}$ 2-lineer fonksiyoneli için

$$(i) \quad ((x_1 + x_2) \otimes y)(f) = f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y) = (x_1 \otimes y)(f) + (x_2 \otimes y)(f) \\ = (x_1 \otimes y + x_2 \otimes y)(f)$$

$$(ii) \quad (x \otimes (y_1 + y_2))(f) = f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2) = (x \otimes y_1)(f) + (x \otimes y_2)(f) \\ = (x \otimes y_1 + x \otimes y_2)(f)$$

$$(iii) \quad (\lambda(x \otimes y))(f) = \lambda f(x, y) = f(\lambda x, y) = (\lambda x \otimes y)(f) \text{ ve} \\ (\lambda(x \otimes y))(f) = \lambda f(x, y) = f(x, \lambda y) = (x \otimes \lambda y)(f)$$

$$(iv) \quad (0_x \otimes y)(f) = f(0_x, y) = f(0_{\mathbb{F}} \cdot x, y) = 0_{\mathbb{F}} \cdot f(x, y) = 0_{\mathbb{F}} = 0(f)$$

sağlanır.

Sonuç olarak, Önerme'nin (iii) şikkından, her bir $u \in X \otimes Y$ tensörünün $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ şeklinde temel tensörlerin toplamı olarak temsil edilebileceği görülür.

$f : X \times Y \rightarrow \mathbb{F}$ bir 2-lineer fonksiyonel olsun. Her bir $u \in X \otimes Y$ tensörü, $BL(X \times Y, \mathbb{F})$ üzerinde bir lineer fonksiyonel olarak görüldüğünden, her $u \in X \otimes Y$ için bir

$$g : X \otimes Y \rightarrow \mathbb{F}, g(u) = u(f)$$

fonksiyonu tanımlanabilir. g , $X \otimes Y$ üzerinde bir lineer fonksiyoneldir. Üstelik,

$$g(x \otimes y) = (x \otimes y)(f) = f(x, y)$$

dir ve buradan $g\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)$ olur. Böylece f 2-lineer fonksiyoneli, e 2-lineer fonksiyonu ile g lineer fonksiyonelinin $g \circ e$ bileşkesine eşit olmak durumunda kalır.

Diğer taraftan, eğer $\psi, X \otimes Y$ cebirsel tensör çarpımı üzerinde bir lineer fonksiyonel ise o zaman 2-lineer fonksiyon olan $e : X \times Y \rightarrow X \otimes Y, e(x, y) = x \otimes y$ için $g = \psi$ olarak tanımlanırsa $\psi \circ e$ fonksiyonu $X \times Y$ üzerinde bir f 2-lineer fonksiyonelidir. Böylece $X \times Y$ üzerindeki 2-lineer fonksiyonellerle $X \otimes Y$ üzerindeki lineer fonksiyoneller arasında birebir bir eşleme vardır.

Genel durumda, $X \otimes Y$ cebirsel tensör çarpımı ve e 2-lineer fonksiyonu bir evrensellik özelliğine sahiptir:

Teorem 2.36. X ve Y , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde birer vektör uzayı olsun. Her Z , $\mathbb{F}$ -vektör uzayı ve her $f : X \times Y \rightarrow Z$ 2-lineer fonksiyonu için $f = g \circ e$ olacak şekilde tek bir $g : X \otimes Y \rightarrow Z$ sınırlı lineer dönüşümü vardır.

Teoremdaki ifade diyagram dilinde şöyle söylenebilir: “Her Z $\mathbb{F}$ -vektör uzayı ve her $f : X \times Y \rightarrow Z$ 2-lineer fonksiyonu için,

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{f} & Z \\ e \downarrow & \nearrow \exists g & \\ X \otimes Y & & \end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan tek bir $g : X \otimes Y \rightarrow Z$ sınırlı lineer dönüşümü vardır.

Teorem 2.37. Verilen herhangi iki X ve Y vektör uzayının $X \otimes Y$ tensör çarpımı daima mevcuttur ve izomorfizma farkıyla tektir. Yani X ve Y vektör uzayları için iki tensör çarpımı $X \otimes Y$ ve $X \tilde{\otimes} Y$ ise her $x \in X$, $y \in Y$ için $e(x, y) = \phi(\tilde{e}(x, y))$ olacak şekilde birebir ve örten bir $\phi : X \tilde{\otimes} Y \rightarrow X \otimes Y$ sınırlı lineer dönüşümü vardır.

Önerme 2.38. A ve B aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde birer cebir olsun. $A \otimes B$ tensör çarpımı üzerinde teklikle belirli

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2 \otimes b_1 b_2) \quad (a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B)$$

şeklindeki $\cdot$ işlemi ile $A \otimes B$ bir cebirdir. Eğer A ve B cebirleri değişmeli ise $A \otimes B$ de değişmelidir. Eğer e_A , A ’nın ve e_B , B ’nin birim elemanları ise $e_A \otimes e_B$, $A \otimes B$ cebirinin birim elemanlarıdır.

İspat. $a = (a_1, b_1) \in A \times B$ olsun.

$$\begin{aligned} \varphi : A \times B &\rightarrow A \otimes B \\ (a_2, b_2) &\mapsto a_1 a_2 \otimes b_1 b_2 \end{aligned}$$

funksiyonu tanımlansın. φ , 2-lineer fonksiyondur: Her $a, a_3 \in A$, $b_2, b_3 \in B$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha a_2 + a_3, b_2) &= a_1(\alpha a_2 + a_3) \otimes b_1 b_2 \\ &= (\alpha(a_1 a_2) + a_1 a_3) \otimes b_1 b_2 \\ &= (\alpha(a_1 a_2)) \otimes b_1 b_2 + a_1 a_3 \otimes b_1 b_2 \\ &= \alpha(a_1 a_2 \otimes b_1 b_2) + (a_1 a_3 \otimes b_1 b_2) \\ &= \alpha \varphi(a_2, b_2) + \varphi(a_3, b_2) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde, $\varphi(a_2, \alpha b_2 + b_3) = \alpha \varphi(a_2, b_2) + \varphi(a_2, b_3)$ olur.

$A \otimes B$, A ve B cebirlerinin tensör çarpımı olduğundan $A \otimes B$ bir vektör uzayıdır ve

$$\begin{aligned} \tau : A \times B &\rightarrow A \otimes B \\ (a, b) &\rightarrow \tau(a, b) = a \otimes b \end{aligned}$$

2-lineer fonksiyonu ile birlikte $(A \otimes B, \tau)$ ikilisi aşağıdaki özellikleri sağlar:

“Her F vektör uzayı ve her 2-lineer $V : A \times B \rightarrow F$ fonksiyonu için $V = \tilde{V} \circ \tau$ olacak şekilde bir tek $\tilde{V} : A \otimes B \rightarrow F$ lineer dönüşümü vardır.”

Bu durumda $F = A \otimes B$ vektör uzayı ve 2-lineer $\varphi : A \times B \rightarrow A \otimes B$ fonksiyonu için $\varphi = \mu_a \circ \tau$ olacak şekilde bir tek $\mu_a : A \otimes B \rightarrow A \otimes B$ lineer dönüşümü vardır. Yani her $(a_2, b_2) \in A \times B$ için

$$\begin{aligned} \varphi(a_2, b_2) &= (\mu_a \circ \tau)(a_2, b_2) = \mu_a(\tau(a_2, b_2)) \\ \Rightarrow a_1 a_2 \otimes b_1 b_2 &= \mu_a(a_2 \otimes b_2) \quad (a_2 \in A, b_2 \in B) \end{aligned}$$

olur. $a = (a_1, b_1) \in A \times B$ için,

$$\begin{aligned} \phi : A \times B &\rightarrow \mathcal{L}(A \otimes B) \\ a &\mapsto \phi(a) = \mu_a : A \otimes B \rightarrow A \otimes B \\ a_2 \otimes b_2 &\mapsto \mu_a(a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2 \otimes b_1 b_2 \end{aligned}$$

ile tanımlanan ϕ fonksiyonu 2-lineerdir. Yani her $a_1, c_1 \in A, b_1, c_2 \in B$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned} \phi(\alpha a_1 + c_1, b_1) &= \alpha \phi(a_1, b_1) + \phi(c_1, b_1) \\ \phi(a_1, \alpha b_1 + c_2) &= \alpha \phi(a_1, b_1) + \phi(a_1, c_2) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. $\mathcal{L}(A \otimes B)$ vektör uzayı ve 2-lineer $\phi : A \times B \rightarrow \mathcal{L}(A \otimes B)$ fonksiyonu için $\phi = \mu \circ \tau$ olacak şekilde bir tek $\mu : A \otimes B \rightarrow \mathcal{L}(A \otimes B)$ lineer dönüşümü vardır.

Yani her $(a_1, b_1) \in A \times B$ için,

$$\mu_a = \phi(a_1, a_2) = (\mu \circ \tau)(a_1, b_1) = \mu(\tau(a_1, b_1)) = \mu(a_1 \otimes b_1)$$

olur. O halde $a = (a_1, b_1) \in A \times B$ için

$$\begin{aligned} \cdot : (A \otimes B) \times (A \otimes B) &\rightarrow (A \otimes B) \\ (a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2) &\mapsto (a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) := \mu(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) \\ &= \mu_a(a_2 \otimes b_2) \\ &= a_1 a_2 \otimes b_1 b_2 \end{aligned}$$

bir ikili işlemdir ve $\cdot$ işlemi ile $A \otimes B$ bir cebirdir:

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2 \in A \otimes B \text{ için,}$$

$$\begin{aligned} (\alpha(a_1 \otimes b_1))(a_2 \otimes b_2) &= (a_1 \otimes b_1)(\alpha(a_2 \otimes b_2)) \\ &= \alpha(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) \\ &= (\alpha a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) \\ &= ((\alpha a_1) a_2) \otimes (b_1 b_2) \\ &= (a_1 (\alpha a_2)) \otimes (b_1 b_2) \\ &= (a_1 \otimes b_1)(\alpha(a_2 \otimes b_2)) \end{aligned}$$

olduğundan $A \otimes B$ bir cebirdir.

Eğer A ve B Banach uzayları ise $A \otimes B$ tensör çarpımları daima vardır, ancak $A \otimes B$ bir Banach uzayı olmayabilir. Bu durumda $A \otimes B$ üzerinde bir norm tanımlayıp bu norma göre tamlaştırma yapılarak bir Banach uzayı elde etmek mümkündür.

2.3. Banach Uzayların Projektif Tensör Çarpımı

Tanım 2.39. A ve B birer Banach uzayı olsun. $A \otimes B$ üzerinde bir $\|\cdot\|$ normu, her $x \in A, y \in B$ için

$$\|x \otimes y\| = \|x\| \|y\|$$

koşulunu sağlıyorsa bu norma *çapraz norm (cross norm)* adı verilir.

Tanım 2.40. A ve B Banach uzayları olsun. $A \otimes B$ üzerinde $\|\cdot\|_\pi$ projektif normu, $u \in A \otimes B$ için

$$\|u\|_\pi := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\|_A \|y_i\|_B \mid u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, x_i \in A, y_i \in B, n \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.41. $\|\cdot\|_\pi$ projektif normu, $A \otimes B$ üzerinde bir çapraz normdur. Üstelik, $A \otimes B$ üzerindeki her $\|\cdot\|$ çapraz normu için $\|u\| \leq \|u\|_\pi$ ($u \in A \otimes B$) sağlanır.

Tanım 2.42. A ve B birer Banach uzayı olsun. $A \otimes B$ nin $\|\cdot\|_\pi$ normuna göre tamlanışına *projektif tensör çarpımı* denir ve $A \hat{\otimes} B$ ile gösterilir.

Önerme 2.43. A ve B Banach uzayları ve $x \in A \hat{\otimes} B$ olsun. Bu durumda $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes b_i$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\| \|b_i\| < \infty$ olacak şekilde A da bir $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ ve B de bir $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi vardır. Üstelik,

$$\|x\|_{\pi} := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\| \|b_i\| < \infty \mid x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes b_i, a_i \in A, b_i \in B \right\}$$

dir.

Teorem 2.44. $(A, \|\cdot\|_A)$ ve $(B, \|\cdot\|_B)$ birer normlu cebir olsun. $\|\cdot\|_{\pi}$, $A \otimes B$ cebiri üzerindeki projektif norm olmak üzere $(A \hat{\otimes} B, \|\cdot\|_{\pi})$ bir Banach cebiridir.

İspat. $a = \sum_{i=1}^r x_i \otimes y_i, b = \sum_{j=1}^s z_j \otimes t_j \in A \hat{\otimes} B$ elemanlarını alalım. O halde,

$$\begin{aligned} \|ab\|_{\pi} &\leq \left\| \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s x_i z_j \otimes y_i t_j \right\|_{\pi} \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \|x_i z_j\|_A \cdot \|y_i t_j\|_B \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^r \|x_i\|_A \cdot \|y_i\|_B \right) \left(\sum_{j=1}^s \|z_j\|_A \cdot \|t_j\|_B \right) \leq \|a\|_{\pi} \|b\|_{\pi} \end{aligned}$$

olup istenen elde edilir.

Önerme 2.45. A bir Banach cebiri olsun. $A \hat{\otimes} A$ projektif tensör çarpımı,

$$A \times (A \hat{\otimes} A) \rightarrow A \hat{\otimes} A, r \cdot (a \otimes b) = (ra) \otimes b$$

ve

$$(A \hat{\otimes} A) \times A \rightarrow A \hat{\otimes} A, (a \otimes b) \cdot r = a \otimes (br)$$

dış işlemleriyle bir Banach A -bimodüldür.

İspat. A bir Banach cebiri olduğundan $A \hat{\otimes} A$ bir Banach uzayıdır. İlk olarak, $A \hat{\otimes} A$ projektif tensör çarpımının bir sol A -modül olduğunu gösterelim:

$$\cdot : A \times (A \hat{\otimes} A) \rightarrow A \hat{\otimes} A, r \cdot (a \otimes b) = (ra) \otimes b$$

tanımlansın. Bu çarpımın iyi tanımlı olduğunu ve bir sol A -modülün koşullarını sağladığını göstermek için, her $r \in A$ için $f_r(a, b) = (ra) \otimes b$ kuralı ile bir $f_r : A \times A \rightarrow A \hat{\otimes} A$ fonksiyonunu tanımlayalım. Her $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in A$ için,

$$(1) f_r(a_1 + a_2, b) = (r(a_1 + a_2)) \otimes b = (ra_1) \otimes b + (ra_2) \otimes b = f_r(a_1, b) + f_r(a_2, b)$$

$$(2) f_r(a, b_1 + b_2) = (ra) \otimes (b_1 + b_2) = (ra) \otimes b_1 + (ra) \otimes b_2 = f_r(a, b_1) + f_r(a, b_2)$$

$$(3) \quad f_r(a_1 a_2, b) = (r(a_1 a_2)) \otimes b = ((ra_1)a_2) \otimes b = (ra_1) \otimes (a_2 b) = f_r(a_1, a_2 b)$$

koşulları gerçeğlendiğinden f_r bir 2-lineer fonksiyondur. O halde Teorem 2.36'dan dolayı $g(a \otimes b) = f_r(a, b) = (ra) \otimes b$ olacak şekilde bir $g : A \hat{\otimes} A \rightarrow A \hat{\otimes} A$ lineer dönüşümü bulunur. Her $a \otimes b \in A \hat{\otimes} A$ için $g(a \otimes b) = (ra) \otimes b$ dir. Dolayısıyla $r \cdot (a \otimes b) = (ra) \otimes b$ çarpımı iyi tanımlıdır ve her $x, y \in A \hat{\otimes} A$ için $r \cdot (x + y) = g(x + y) = g(x) + g(y) = r \cdot x + r \cdot y$ dir. Ayrıca her $r, t \in A$ ve $a \otimes b \in A \hat{\otimes} A$ için,

$$\begin{aligned} (r+t) \cdot (a \otimes b) &= (ra + ta) \otimes b \\ &= (ra) \otimes b + (ta) \otimes b \\ &= r \cdot (a \otimes b) + t \cdot (a \otimes b) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (rt) \cdot (a \otimes b) &= ((rt)a) \otimes b \\ &= (r(ta)) \otimes b \\ &= r \cdot (ta) \otimes b \\ &= r \cdot (t \cdot (a \otimes b)) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $A \hat{\otimes} A$ bir sol A -modüldür. Benzer şekilde $\cdot : (A \hat{\otimes} A) \times A \rightarrow A \hat{\otimes} A$, $(a \otimes b) \cdot r = a \otimes (br)$ fonksiyonu ile $A \hat{\otimes} A$ bir sağ A -modüldür. Her $r, s \in A$ ve her $a \otimes b \in A \hat{\otimes} A$ için,

$$r \cdot ((a \otimes b) \cdot s) = r \cdot (a \otimes (bs)) = ra \otimes bs = (ra \otimes b) \cdot s = (r \cdot (a \otimes b)) \cdot s$$

olduğundan $A \hat{\otimes} A$ bir A -bimodüldür. Üstelik A bir normlu cebir olduğundan her $r \in A$ ve her $a \otimes b \in A \hat{\otimes} A$ için,

$$\|r \cdot (a \otimes b)\|_\pi = \|(ra) \otimes b\|_\pi \leq \|ra\| \|b\| \leq \|r\| \|a\| \|b\| < \|r\| \|a \otimes b\|_\pi$$

ve

$$\|(a \otimes b) \cdot r\|_\pi = \|a \otimes br\|_\pi \leq \|a\| \|br\| \leq \|a\| \|b\| \|r\| < \|a \otimes b\|_\pi \|r\|$$

olur, yani $A \hat{\otimes} A$ bir Banach A -bimodüldür.

3. n -ÇARPANLAR ve n -JORDAN ÇARPANLAR

Tanım 3.1. A bir Banach cebiri, X bir A -bimodül ve $T : A \rightarrow X$ sınırlı bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $a, b \in A$ için $T(ab) = T(a) \cdot b$ ise T ye *sol çarpan*; $T(ab) = a \cdot T(b)$ ise T ye *sağ çarpan* denir. Eğer T hem sol hem de sağ çarpan ise T ye *çarpan* adı verilir.

Tanım 3.2. A bir Banach cebiri, X bir A -bimodül ve $T : A \rightarrow X$ sınırlı bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $a \in A$ için $T(a^2) = T(a) \cdot a$ ise T ye *sol Jordan çarpan*; $T(a^2) = a \cdot T(a)$ ise T ye *sağ Jordan çarpan* denir. Eğer T hem sol hem de sağ Jordan çarpan ise T ye *Jordan çarpan* adı verilir.

Tanım 3.3. A bir Banach cebiri, X bir A -bimodül ve $T : A \rightarrow X$ sınırlı bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $a, b \in A$ için $a \cdot T(b) = T(a) \cdot b$ şartı sağlanıyorsa T ye *iki yanlı çarpan* denir.

Not 3.4. Eğer T bir çarpan ise T bir iki yanlı çarpandır. Ancak karşısı genelde doğru değildir:

Örnek 3.5. $A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ Banach cebiri üzerinde bir $T : A \rightarrow A$ dönüşümü

$$T \left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ile tanımlansın. T bir sınırlı lineer dönüşümdür.

$$\text{Üstelik her } x = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in A \text{ için}$$

$$T(x)y = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & af \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$xT(y) = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & af \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olduğundan } T(x)y = xT(y) \text{ dir.}$$

O halde T iki yanlı çarpandır. Ancak $xy = \begin{bmatrix} 0 & 0 & af \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ için $T(xy) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olup $T(xy) \neq T(x)y$ ve $T(xy) \neq xT(y)$ olduğundan T bir çarpan değildir.

Tanım 3.6. A bir Banach cebiri ve X bir A -bimodül olsun. $\omega \in A$ alalım. Eğer $x \in X$ için $\omega \cdot x = 0$ ($x \cdot \omega = 0$) iken $x = 0$ oluyorsa ω elemanına X in sol (sağ) ayrılma noktası denir.

Teorem 3.7. *A bir Banach cebiri ve X bir A -bimodül olsun. Eğer $\omega \in A$ elemanı, X A -bimodülünün bir sol (sağ) ayrılma noktası ve $T : A \rightarrow X$ iki yanlı çarpan ise o zaman T bir sol (sağ) çarpandır.*

İspat. *T iki yanlı çarpan olduğundan her $a, b \in A$ için $a \cdot T(b) = T(a) \cdot b$ dir. Her $x \in A$ için,*

$$x \cdot T(ab) = T(x) \cdot (ab) = (T(x) \cdot a) \cdot b = (x \cdot T(a)) \cdot b = x \cdot (T(a) \cdot b)$$

olur. Özel olarak, $\omega \cdot T(ab) = \omega \cdot (T(a) \cdot b)$ olduğundan her $a, b \in A$ için

$$\omega \cdot (T(ab) - T(a) \cdot b) = 0 \Rightarrow T(ab) - T(a) \cdot b = 0 \Rightarrow T(ab) = T(a) \cdot b$$

olup T bir sol çarpandır.

Tanım 3.8. *A bir Banach cebiri, X bir Banach sol A -modül, $n \geq 2$ bir tamsayı ve $T : A \rightarrow X$ sınırlı bir lineer dönüşüm olsun. Eğer*

- (i) *her $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ için $T(a_1 a_2 \dots a_n) = a_1 \cdot T(a_2 \dots a_n)$ ise T ye sağ n -çarpan;*
- (ii) *her $a \in A$ için $T(a^n) = a \cdot T(a^{n-1})$ ise T ye sağ n -Jordan çarpan denir.*

Sol n -çarpan, sol n -Jordan çarpan, n -çarpan ve n -Jordan çarpan da benzer şekilde tanımlanır.

Sağ çarpanlar için geçerli olan tüm sonuçlar, sol çarpanlar için de benzer ifadelerle yazılacağından, bundan sonraki kısımlarda sadece sağ versiyonları kullanacağız. Sadelik için ise sağ önekini kullanmayacağız.

- Eğer T bir n -çarpan ise T bir $(n+1)$ -çarpandır:

İspat. *T bir n -çarpan olsun. O halde her $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ için $T(a_1 a_2 \dots a_n) \stackrel{\circledast}{=} a_1 T(a_2 \dots a_n)$ sağlanır. $a_{n+1} \in A$ alalım. Bu durumda*

$$\begin{aligned} T(a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}) &= T \left(\overbrace{(a_1 a_2)}^{\in A} \underbrace{a_3 \dots a_n a_{n+1}}_{(n-1)\text{tane}} \right) \\ &\stackrel{\circledast}{=} (a_1 a_2) \cdot \left(T(\overbrace{a_3 \dots a_{n+1}}^{(n-1)\text{tane}}) \right) \\ &= a_1 \cdot \left(a_2 \cdot T(\overbrace{a_3 \dots a_{n+1}}^{(n-1)\text{tane}}) \right) \\ &\stackrel{\circledast}{=} a_1 \cdot T(a_2 a_3 \dots a_{n+1}) \end{aligned}$$

olup T bir $(n+1)$ -çarpandır.

A bir Banach cebiri ve X bir Banach sol A -modül olmak üzere,

$$Mul_n(A, X) = \{T \mid T : A \rightarrow X \quad n\text{-}\text{çarpan}\}$$

ve

$$JMul_n(A, X) = \{T \mid T : A \rightarrow X \quad n\text{-Jordan}\text{ çarpan}\}$$

kümeleri tanımlansın. $Mul_n(A, X)$ kümesi, $\mathfrak{B}(X, Y)$ vektör uzayının kapalı bir altuzayıdır.

- Genel durumda, $Mul_n(A, X) \subsetneq Mul_{n+1}(A, X)$ dir. Eğer A bir esas Banach cebiri ise $Mul_n(A, X) = Mul_{n+1}(A, X)$ dir (Laali, Fozouni, 2017).
- $Mul_n(A, X) \subset JMul_n(A, X)$ olduğu açıktır. $JMul_n(A, X) \subset Mul_n(A, X)$ sağlanmadığına dair bir örneği $n = 3$ için verelim:

Örnek 3.9. $A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & x & c \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b, c, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ Banach cebiri üzerinde bir $T : A \rightarrow A$ dönüşümü

$$T \left(\begin{bmatrix} 0 & a & x & c \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & a & y & c \\ 0 & 0 & b & x \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ile tanımlansın. T bir sınırlı lineer dönüşümdür. Üstelik her $u = \begin{bmatrix} 0 & a & x & c \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in A$ için,

$$u^2 = \begin{bmatrix} 0 & a & x & c \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & x & c \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ab & ay+xa \\ 0 & 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$u^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ab & ay+xa \\ 0 & 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & x & c \\ 0 & 0 & b & y \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a^2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olup}$$

$$T(u^2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & ab & ay+xa \\ 0 & 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ab & ay+xa \\ 0 & 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = u^2$$

ve $T(u^3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a^2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a^2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = u^3$ olur. Bu nedenle T bir 3-Jordan çarpandır, ancak T bir 3-çarpan değildir.

- Genel durumda $JMul_n(A, X) \subsetneq JMul_{n+1}(A, X)$ dir.

Örnek 3.10. A bir nilpotent Banach cebiri ve $I(A) = m$ olsun. O halde $a_1a_2\ldots a_{m-1} \neq 0$ olacak şekilde $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1} \in A$ vardır. $X = A \hat{\otimes} A$ alalım. Her $a \in A$ için,

$$T : A \rightarrow X$$

$$a \mapsto T(a) = a_1a_2\ldots a_{m-1} \otimes a$$

tanımlansın. T nin bir lineer dönüşüm olduğunu görelim:

- Her $a, b \in A$ için $a = b$ olsun. Her $f \in BL(A \times A, \mathbb{C})$ için,

$$\begin{aligned} (a_1a_2\ldots a_{m-1} \otimes a)(f) &= f(a_1a_2\ldots a_{m-1}, a) \\ &= f(a_1a_2\ldots a_{m-1}, b) = (a_1a_2\ldots a_{m-1} \otimes b)(f) \end{aligned}$$

olduğundan $T(a) = T(b)$ olup T iyi tanımlıdır.

- Her $a, b \in A$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned} T(\alpha a + b) &= (a_1a_2\ldots a_{m-1}) \otimes (\alpha a + b) \\ &= (a_1a_2\ldots a_{m-1}) \otimes (\alpha a) + (a_1a_2\ldots a_{m-1} \otimes b) \\ &= \alpha \cdot (a_1a_2\ldots a_{m-1} \otimes a) + (a_1a_2\ldots a_{m-1} \otimes b) \\ &= \alpha \cdot T(a) + T(b) \end{aligned}$$

olduğundan T bir lineer dönüşümdür.

$m > n$ olmak üzere T lineer dönüşümü bir $(n+1)$ -Jordan çarpandır:

$$\begin{aligned} T(a^n) &= a_1a_2\ldots a_{m-1} \otimes a^n = 0, \\ a \cdot T(a^{n-1}) &= a(a_1a_2\ldots a_{m-1} \otimes a^{n-1}) = aa_1a_2\ldots a_{m-1} \otimes a^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $a_0^{n-1} \neq 0$ olacak şekilde bir $a_0 \in A$ elemanı var olduğundan, $T(a_0^{n-1}) = a_1a_2\ldots a_{m-1} \otimes a_0^{n-1} \neq 0 = a_0 \cdot T(a_0^{n-2})$ olup T bir n -Jordan çarpan değildir. O halde her $(n+1)$ -Jordan çarpan bir n -Jordan çarpan olmayabilir.

Bu çalışmada aşağıdaki sorulara yanıt aranmaktadır:

- A Banach cebirinin ve X Banach sol A -modülün hangi koşulları sağlaması durumunda $(n + 1)$ -Jordan çarpan olan bir $T : A \rightarrow X$ sınırlı lineer dönüşümü bir n -Jordan çarpan olur?
- n -Jordan çarpan olan bir T sınırlı lineer dönüşümü hangi koşullar altında bir n -çarpandır?

4. n -JORDAN ÇARPANLARIN KARAKTERİZASYONU

Lemma 4.1. *A bir Banach cebiri, X bir Banach sol A -modül ve $T : A \rightarrow X$ bir Jordan çarpan olsun. O halde $n \geq 2$ tamsayısı için T bir n -Jordan çarpanıdır.*

İspat. *n üzerinden tümevarım ile yapalım. $n = 3$ için T nin bir 3-Jordan çarpan olduğunu görelim: T bir Jordan çarpan olduğundan her $a \in A$ için*

$$T(a^2) = a \cdot T(a) \quad (2)$$

dır. Burada a yerine $a + b$ yazılırsa, her $a, b \in A$ için

$$\begin{aligned} T((a+b)^2) &= (a+b) \cdot T(a+b) \\ \Rightarrow T(a^2 + ab + ba + b^2) &= a \cdot T(a+b) + b \cdot T(a+b) \\ \Rightarrow T(a^2) + T(ab + ba) + T(b^2) &= a \cdot T(a) + a \cdot T(b) + b \cdot T(a) + b \cdot T(b) \\ \Rightarrow T(ab + ba) &= a \cdot T(b) + b \cdot T(a) \end{aligned} \quad (3)$$

olur. (3) eşitliğinde b yerine a^2 yazılırsa, her $a \in A$ için

$$2T(a^3) = a \cdot T(a^2) + a^2 \cdot T(a) \quad (4)$$

bulunur. (2) ve (4) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} 2T(a^3) &= a \cdot T(a^2) + a \cdot (a \cdot T(a)) \\ \Rightarrow 2T(a^3) &= a \cdot T(a^2) + a \cdot T(a^2) \Rightarrow T(a^3) = a \cdot T(a^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece T bir 3-Jordan çarpanıdır. Her $3 \leq k \leq n$ için

$$T(a^k) = a \cdot T(a^{k-1}) \quad (5)$$

sağlansın. (3) de b yerine a^k yazılırsa,

$$\begin{aligned} T(aa^k + a^k a) &= a \cdot T(a^k) + a^k \cdot T(a) \\ \Rightarrow T(2a^{k+1}) &= a \cdot T(a^k) + a^k \cdot T(a) \\ \Rightarrow 2T(a^{k+1}) &= a \cdot T(a^k) + a^k \cdot T(a) \end{aligned} \quad (6)$$

bulunur. (5) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} a^k \cdot T(a) &= (a^{k-1} a) \cdot T(a) = a^{k-1} \cdot T(a^2) = (a^{k-2} a) \cdot T(a^2) \\ &= a^{k-2} \cdot T(a^3) = \dots = a \cdot T(a^k) \end{aligned} \quad (7)$$

olur. (7) eşitliğinden,

$$a \cdot T(a^k) + \underbrace{a^k \cdot T(a)}_{aT(a^k)} = 2a \cdot T(a^k)$$

olur. Bu eşitlik, (6) da yerine yazılırsa

$$2T(a^{k+1}) = 2a \cdot T(a^k)$$

elde edilir. Buradan $T(a^{k+1}) = a \cdot T(a^k)$ olur. O halde T bir $(k+1)$ -Jordan çarpanıdır. Böylece istenen elde edilir.

Bu Lemmanın karşıtı doğru değildir. Yani $n \geq 2$ olmak üzere her n -Jordan çarpan, Jordan çarpan olmayabilir. $n = 3$ için aşağıdaki örneği verelim:

Örnek 4.2. A Banach cebirini ve T lineer dönüşümünü ilk örnekte verildiği gibi alalım. Her $u = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in A$ için $T(u^3) = uT(u^2)$ dir. Yani T , 3-Jordan çarpan olur. Ancak $T(u^2) \neq uT(u)$ olduğundan T bir Jordan çarpan değildir.

Teorem 4.3. A bir birimli Banach cebiri, X bir birimsel Banach sol A -modül ve $T : A \rightarrow X$ sürekli bir lineer dönüşüm olsun. $ab = e_A$ olacak şekilde her $a, b \in A$ için $T(ab) = a \cdot T(b)$ ise T bir n -Jordan çarpanıdır.

İspat. Keyfi bir $a \in A$ alalım. $|\lambda| < \frac{1}{\|a\|}$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$\|e_A - (e_A - \lambda a)\| = \|e_A - e_A + \lambda a\| = \|\lambda a\| = |\lambda| \|a\| < \frac{1}{\|a\|} \cdot \|a\| < 1$$

olduğundan $e_A - \lambda a$ tersinirdir ve tersi

$$\begin{aligned} (e_A - \lambda a)^{-1} &= e_A + \sum_{n=1}^{\infty} (e_A - (e_A - \lambda a))^n = e_A + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a)^n \\ &= e_A + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n a^n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n a^n \end{aligned}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned}
T(e_A) &= T((e_A - \lambda a)(e_A - \lambda a)^{-1}e_A) \\
&= (e_A - \lambda a) \cdot T((e_A - \lambda a)^{-1}e_A) \\
&= (e_A - \lambda a) \cdot T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n e_A\right) \\
&= e_A \cdot T\left(\lambda^0 a^0 e_A + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n a^n e_A\right) - \lambda a \cdot T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n e_A\right) \\
&= e_A T(e_A) + e_A \cdot T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n a^n e_A\right) - \lambda a \cdot T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n e_A\right) \\
&= T(e_A \cdot e_A) + T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n a^n e_A\right) - \lambda a \cdot T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n e_A\right) \\
&= T(e_A) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T(a^n e_A) - \lambda a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n T(a^n e_A)
\end{aligned}$$

dir. Buradan $|\lambda| < \frac{1}{\|a\|}$ olacak şekildeki her $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T(a^n) - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} a \cdot T(a^n) = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T(a^n) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n a \cdot T(a^{n-1}) = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n [T(a^n) - a \cdot T(a^{n-1})] = 0
\end{aligned}$$

olup her $n \in \mathbb{N}$ için $T(a^n) = a \cdot T(a^{n-1})$ dir. Böylece T bir n -Jordan çarpandır.

Sonuç 4.4. A birimli bir Banach cebiri, X birimsel bir Banach sol A -modül ve $T : A \rightarrow X$ sürekli bir lineer dönüşüm olsun. Eğer $a \in \text{Inv}(A)$ ve $T(aa^{-1}) = a \cdot T(a^{-1})$ ise T bir n -Jordan çarpandır.

İspat. $a \in \text{Inv}(A)$ ve $T(aa^{-1}) = a \cdot T(a^{-1})$ olsun. $a \in \text{Inv}(A)$ olduğundan $aa^{-1} = e_A = a^{-1}a$ dir ve

$$T(e_A) = T(aa^{-1}) = a \cdot T(a^{-1})$$

dir. Bir önceki teoremden, T nin n -Jordan çarpan olduğu görülür.

Teorem 4.5. A birimli bir Banach cebiri, X birimsel bir Banach sol A -modül ve $T : A \rightarrow X$ sürekli bir lineer dönüşüm olsun. $p \in A$ bir idempotent eleman olmak üzere $ab = p$ şartını sağlayan her $a, b \in A$ için $T(ab) = a \cdot T(b)$ ise o zaman T , pAp Banach cebiri üzerinde bir n -Jordan çarpandır.

İspat. $p \in A$ bir idempotent eleman olsun. $pAp = \{pxp \mid x \in A\}$ kümesinin, A nın birimli kapalı bir altceberi olduğunu ve biriminin p olduğunu gösterelim:

Her $pxp, pyp \in pAp$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (pxp) + pyp &= (\alpha \cdot p)xp + pyp = p(\alpha \cdot (xp)) + pyp \\ &= p(\alpha \cdot x)p + pyp = p(\alpha \cdot x + y)p \in pAp\end{aligned}$$

ve

$$(pxp)(pyp) = pxp^2yp \in pAp$$

olduğundan pAp , A nın bir altcebidir. $\overline{pAp} = pAp$ olduğundan pAp kapalıdır. O halde pAp , A nın bir Banach altcebidir.

$p = p^2 = pp = pe_{Ap} \in pAp$ dir ve her $pxp \in pAp$ için,

$$p(pxp) = ppxp = p^2xp = pxp \text{ ve } (pxp)p = pxpp = pxp^2 = pxp$$

eşitlikleri sağlandığından pAp birimlidir ve birimi p dir.

$a \in A$ keyfi bir eleman olsun. $\lambda \in \mathbb{C} \ni |\lambda| < \frac{1}{\|pap\|}$ alalım. $\|e_{pAp} - p\| = \|p - p\| = 0 < 1$ olduğundan $p \in pAp$ tersinirdir. Ayrıca

$$p - \lambda pap = p - p\lambda ap = pe_{Ap} - p\lambda ap = p(e_{Ap} - \lambda ap) = p(e_A - \lambda a)p \in pAp$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\|e_{pAp} - (p - \lambda pap)\| &= \|p - (p - \lambda pap)\| \\ &= \|p - p + \lambda pap\| \\ &= \|\lambda pap\| \\ &= |\lambda| \cdot \|pap\| < \frac{1}{\|pap\|} \cdot \|pap\| = 1\end{aligned}$$

olduğundan $(p - \lambda pap)$ elemanı tersinirdir.

$$\begin{aligned}
T(p) &= T((p - \lambda pap)(p - \lambda pap)^{-1}p) \\
&= (p - \lambda pap)T((p - \lambda pap)^{-1}p) \\
&= (p - \lambda pap)T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (pap)^n p\right) \\
&= pT\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (pap)^n p\right) - \lambda papT\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (pap)^n p\right) \\
&= pT\left(p + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n (pap)^n p\right) - \lambda papT\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (pap)^n p\right) \\
&= pT(p) + pT\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n (pap)^n p\right) - \lambda papT\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (pap)^n p\right) \\
&= T(p) + p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T((pap)^n) - \lambda pap \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n T((pap)^n)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $|\lambda| < \frac{1}{\|pap\|}$ şartını sağlayan her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}
0 &= p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T((pap)^n) - \lambda pap \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n T((pap)^n) \\
\Rightarrow 0 &= p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T((pap)^n) - \sum_{n=1=0}^{\infty} \lambda^{n+1} (pap) T((pap)^n) \\
\Rightarrow 0 &= p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T((pap)^n) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n (pap) T((pap)^{n-1}) \\
\Rightarrow 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n [pT((pap)^n) - (pap)T((pap)^{n-1})]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
pT((pap)^n) &= (pap)T((pap)^{n-1}) \\
\Rightarrow pT((pap)^n) &= (p^2ap)T((pap)^{n-1}) \\
\Rightarrow p^{-1}pT((pap)^n) &= p^{-1}(p^2ap)T((pap)^{n-1}) \\
\Rightarrow T((pap)^n) &= (pap)T((pap)^{n-1})
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak, T , pAp üzerinde bir n -Jordan çarpandır.

Teorem 4.6. $n \in \{2, 3\}$ sabiti olsun. A birimli bir Banach cebiri ve X birimsel bir Banach sol A -modül olsun. Her $T : A \rightarrow X$ $(n+1)$ -Jordan çarpan bir n -Jordan çarpandır.

İspat. $n = 2$ ve T , 3-Jordan çarpan olsun. O halde her $a \in A$ için, $T(a^3) = a \cdot T(a^2)$ dir. Bu eşitlikte a yerine $a + e_A$ yazılırsa, X birimsel sol A -modül olduğundan,

$$\begin{aligned}
T((a + e_A)^3) &= (a + e_A) \cdot T((a + e_A)^2) \\
\Rightarrow T(a^3 + 3a^2 + 3a + e_A) &= (a + e_A) \cdot [T(a^2 + 2a + e_A)] \\
\Rightarrow 3T(a^2) + 3T(a) &= 2a \cdot T(a) + a \cdot T(e_A) + T(a^2) + 2T(a) \\
\Rightarrow 3T(a^2) + 3T(a) &= 2a \cdot T(a) + a \cdot T(e_A) + T(a^2) + 2T(a) \\
\Rightarrow 3T(a^2 + a) &= a \cdot T(e_A) + 2a \cdot T(a) + T(a^2) + 2T(a)
\end{aligned} \tag{8}$$

elde edilir. (8) eşitliğinde a yerine $-a$ yazılırsa,

$$3T(a^2 - a) = -a \cdot T(e_A) + 2a \cdot T(a) + T(a^2) - 2T(a) \tag{9}$$

bulunur. (8) ve (9) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
6T(a^2) &= 4a \cdot T(a) + 2T(a^2) \\
\Rightarrow 2T(a^2) &= 2a \cdot T(a)
\end{aligned}$$

olup $T(a^2) = a \cdot T(a)$ dır. Yani T bir Jordan çarpandır.

Şimdi $n = 3$ alalım ve her $a \in A$ için $T(a^4) = a \cdot T(a^3)$ olsun. Bu eşitlikte a yerine $a + e_A$ yazılıp X in birimsel sol A -modül olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
T((a + e_A)^4) &= (a + e_A) \cdot T((a + e_A)^3) \\
\Rightarrow T(a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + e_A) &= (a + e_A) \cdot [T(a^3 + 3a^2 + 3a + e_A)] \\
\Rightarrow T(a^4) + 4T(a^3) + 6T(a^2) + 4T(a) &= a \cdot T(a^3) + 3a \cdot T(a^2) \\
&\quad + 3a \cdot T(a) + a \cdot T(e_A) + T(a^3) + 3T(a^2) + 3T(a) \\
\Rightarrow 3T(a^3) + 3T(a^2) + T(a) &= 3a \cdot T(a^2) + 3a \cdot T(a) + a \cdot T(e_A)
\end{aligned} \tag{10}$$

bulunur. (10) da a yerine $-a$ yazılırsa,

$$-3T(a^3) + 3T(a^2) - T(a) = -3a \cdot T(a^2) + 3a \cdot T(a) - a \cdot T(e_A) \tag{11}$$

elde edilir. (10) ve (11) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$T(a^2) = a \cdot T(a) \tag{12}$$

olur. (11) ve (12) den, her $a \in A$ için,

$$3T(a^3) + T(a) = 3a \cdot T(a^2) + a \cdot T(e_A) \quad (13)$$

bulunur. (13) de a yerine $a + e_A$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3T(a^3 + 3a^2 + 3a + e_A) + T(a + e_A) &= 3(a + e_A) \cdot T(a^2 + 2a + e_A) \\ &+ (a + e_A) \cdot T(e_A) \\ \Rightarrow 3T(a^3) + 9T(a^2) + 9T(a) + 3T(e_A) + T(a) &= 3a \cdot T(a^2) + 6a \cdot T(a) \\ &+ 3a \cdot T(e_A) + 3T(a^2) + 6T(a) + 3T(e_A) + a \cdot T(e_A) \end{aligned}$$

olup

$$9T(a^2) + 9T(a) = 6a \cdot T(a) + 3T(a^2) + 6T(a) + 3a \cdot T(e_A) \quad (14)$$

elde edilir. (14) eşitliğinde $T(a^2) = a \cdot T(a)$ olduğu kullanılırsa, her $a \in A$ için, $9T(a) = 6T(a) + 3a \cdot T(e_A)$ olup

$$T(a) = a \cdot T(e_A) \quad (15)$$

bulunur. (13) ve (15) den,

$$\begin{aligned} 3T(a^3) + a \cdot T(e_A) &= 3a \cdot T(a^2) + a \cdot T(e_A) \\ \Rightarrow T(a^3) &= a \cdot T(a^2) \end{aligned}$$

olup T bir 3-Jordan çarpandır.

Sıradaki teoremin ispatında Vandermonde matrisinden yararlanarak, bir önceki teoremin her $n \geq 2$ tamsayısı için gerçekleştiği gösterilecektir:

Teorem 4.7. A birimli bir Banach cebiri ve X birimsel bir Banach sol A -modül olsun. O zaman her $T : A \rightarrow X$ $(n+1)$ -Jordan çarpan bir n -Jordan çarpandır.

İspat. $1 \leq k \leq n$ olacak şekilde bir k tamsayısı alalım. Öncelikle her $a \in A$ için

$$T((a + ke_A)^{n+1}) = (a + ke_A) \cdot T((a + ke_A)^n) \quad (16)$$

olur. (16) eşitliği ve hipotez kullanılarak şu sonuç elde edilir: $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ olmak üzere

her $a \in A$ ve $1 \leq k \leq n$ için,

$$\begin{aligned} & T((a + ke_A)^{n+1}) \\ &= T\left(\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i (ke_A)^{n+1-i}\right) = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} k^{n+1-i} T(a^i) \end{aligned} \quad (17)$$

ve

$$\begin{aligned} & (a + ke_A) \cdot T((a + ke_A)^n) \\ &= (a + ke_A) \cdot T\left(\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i (ke_A)^{n-i}\right) \\ &= (a + ke_A) \cdot \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^{n-i} T(a^i)\right) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^{n-i} a \cdot T(a^i) + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^{n+1-i} T(a^i) \end{aligned} \quad (18)$$

olup (17) ve (18) birbirine eşit olduğundan,

$$\begin{aligned} & k^{n+1} T(e_A) + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} k^{n+1-i} T(a^i) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^{n-i} a \cdot T(a^i) + k^{n+1} T(e_A) + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^{n+1-i} T(a^i) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} k^{n+1-i} T(a^i) + T(a^{n+1}) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^{n-i} a \cdot T(a^i) + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} k^{n+1-i} T(a^i) \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} k^{n+1-i} T(a^i) + T(a^n) \\ &= \sum_{i=1}^n k^{n+1-i} \binom{n+1}{i} a \cdot T(a^{i-1}) + a \cdot T(a^n) + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} k^{n+1-i} T(a^i) \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n k^{n+1-i} \binom{n+1}{i} T(a^i) = \sum_{i=1}^n k^{n+1-i} \binom{n}{n+1-i} a \cdot T(a^{i-1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n k^{n+1-i} \binom{n}{i} T(a^i) \end{aligned} \quad (19)$$

bulunur. (19) daki eşitlik yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& k^n \binom{n+1}{1} T(a^1) + k^{n-1} \binom{n+1}{2} T(a^2) + \dots + k \binom{n+1}{n} T(a^n) \\
&= k^n \binom{n}{n} a \cdot T(e_A) + k^{n-1} \binom{n}{n-1} a \cdot T(a) \\
&+ \dots + k \binom{n}{1} a \cdot T(a^{n-1}) + k^n \binom{n}{1} T(a) \\
&+ k^{n-1} \binom{n}{2} T(a^2) + \dots + k \binom{n}{n} T(a^n)
\end{aligned}$$

olur ve buradan her $1 \leq k \leq n$ için,

$$\begin{aligned}
k^n \binom{n+1}{1} T(a) &= k^n \binom{n}{n} a \cdot T(e_A) + k^n \binom{n}{1} T(a) \\
k^{n-1} \binom{n+1}{2} T(a^2) &= k^{n-1} \binom{n}{n-1} a \cdot T(a) + k^{n-1} \binom{n}{2} T(a^2) \\
&\vdots \\
k \binom{n+1}{n} T(a^n) &= k \binom{n}{1} a \cdot T(a^{n-1}) + k \binom{n}{n} T(a^n)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2^n & 2^{n-1} & \dots & 2 \\ 3^n & 3^{n-1} & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^n & n^{n-1} & \dots & n \end{bmatrix}$$

matrisini alalım ve $1 \leq i \leq n$ için,

$$\begin{aligned}
X_i(a) &= \binom{n+1}{i} T(a^i), \quad Y_i(a) = \binom{n}{n+1-i} a \cdot T(a^{i-1}), \\
Z_i(a) &= \binom{n}{i} T(a^i)
\end{aligned}$$

diyelim. O halde $MX_i(a) = MY_i(a) + MZ_i(a)$ dır. (Bodaghi, A., Inceboz, H., Lemma 2.1) de $n \times n$ tipindeki M kare matrisinin tersinir olduğu gösterilmiştir. Böylece her $1 \leq i \leq n$ ve her $a \in A$ için $X_i(a) = Y_i(a) + Z_i(a)$ olur. Özel olarak, $i = n$ alınırsa, $X_n(a) = Y_n(a) + Z_n(a)$ olur. Böylece her $a \in A$ için,

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{n} T(a^n) &= \binom{n}{1} a \cdot T(a^{n-1}) + \binom{n}{n} T(a^n) \\
\Rightarrow (n+1) T(a^n) &= n(a \cdot T(a^{n-1})) + T(a^n) \\
\Rightarrow nT(a^n) + T(a^n) &= n(a \cdot T(a^{n-1})) + T(a^n) \\
\Rightarrow T(a^n) &= a \cdot T(a^{n-1})
\end{aligned}$$

olup T bir n -Jordan çarpan olur.

Sonuç 4.8. *A birimli bir Banach cebiri, X birimsel bir Banach sol A -modül ve $T : A \rightarrow X$ bir sınırlı lineer dönüşüm olsun. O halde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(i) *Her $a \in A$ için $T(a) = a \cdot T(e_A)$ dır.*

(ii) *T bir Jordan çarpandır.*

(iii) *T bir n -Jordan çarpandır.*

(iv) *T bir $(n+1)$ -Jordan çarpandır.*

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii): *Her $a \in A$ için $T(a) = a \cdot T(e_A)$ olsun. Burada a yerine a^2 yazılırsa,*

$$T(a^2) = a^2 \cdot T(e_A) = a \cdot (a \cdot T(e_A)) = a \cdot T(a)$$

olup T bir Jordan çarpandır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): *Lemma 4.1 de T bir Jordan çarpan iken $n \geq 2$ için bir n -Jordan çarpan olduğu ispatlanmıştı.*

(iii) $\Rightarrow$ (iv): *T bir n -Jordan çarpan iken $(n+1)$ -Jordan çarpan olduğu açıktır.*

(iv) $\Rightarrow$ (i) *T bir $(n+1)$ -Jordan çarpan olsun. Bu durumda T bir n -Jordan çarpan olacağından, her $a \in A$ için $T(a^n) = a \cdot T(a^{n-1})$ dir. Özel olarak, $n = 1$ alınırsa, $T(a) = a \cdot T(e_A)$ elde edilir.*

Sonuç 4.2 ve Teorem 4.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.9. *A birimli bir Banach cebiri, X birimsel bir Banach sol A - modül ve $T : A \rightarrow X$ sürekli bir lineer dönüşüm olsun. $ab = e_A$ şartını sağlayan her $a, b \in A$ için $T(ab) = a \cdot T(b)$ ise T bir n -çarpandır.*

A bir Banach cebiri ve X bir Banach A -bimodül olmak üzere $T : A \rightarrow X$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer T ,

$$a, b \in A, ab = 0 \Rightarrow T(a)T(b) = 0$$

koşulunu sağlıyor ise T dönüşümüne sıfır çarpımı koruyan lineer dönüşüm adı verilir.

Tez çalışmasında, Banach cebirleri üzerinde tanımlı n -Jordan çarpanlar, sıfır çarpım üzerindeki etkileri ile karakterize edilerek C^* -cebirlerde ve değişmeli yerel kompakt G grubunun $L^1(G)$ grup cebirinde sağladıkları özellikler incelenecektir.

Bu konunun, sınırlı bir yaklaşık birimi olan zayıf amenable Banach cebirleri, idempotent elemanlar ile üretilmiş birimli Banach cebirleri ve W^* -cebirleri gibi uzaylarda çalışılması planlanmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Bodaghi, A., Inceboz, H. (2018). n -Jordan homomorphism on commutative algebras. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 87, 141-146.
- [2] Bonsall, F.F., Duncan, J. (1973). *Complete normed algebras*. Berlin: Springer Verlag.
- [3] Fozouni, M. (2018). n -Jordan multipliers. *Surveys in Mathematics and its Applications*, 13, 121-129.
- [4] Gahramani, H. (2015). On centralizers of Banach algebras. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 38, 155-164.
- [5] Helgason, S. (1956). Multipliers of Banach algebras. *Annals of Mathematics*, 64(2), 240-254.
- [6] Johnson, B.E. (1964). An introduction to the theory of centralizers. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 14, 299-320.
- [7] Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. New York: John Wiley and Sons.
- [8] Laali, J., Fozouni, M. (2017). n -multipliers and their relations with n -homomorphisms. *Vietnam Journal of Mathematics*, 45, 451-457.
- [9] Larsen, R. (1971). *An Introduction to the Theory of Multipliers*. Springer, Berlin.
- [10] Wang, J.K. (1961). Multipliers of commutative Banach algebras. *Pacific Journal of Mathematics*, 11, 1131-1149.
- [11] Wendel, J.G. (1952). Left centralizers and isomorphisms of group algebras. *Pacific Journal of Mathematics*, 2, 251-261.
- [12] Vukman, J. (1999). An identity related to centralizers in semiprime rings. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 40, 447-456.

- [13] Zalar, B. (1991). On centralizers of semiprime rings. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 32, 609-614.
- [14] Zivari-Kazempour, A. (2020). Almost multipliers of frechet algebras. *The Journal of Analysis*, 28, 1075-1084.